Aufgaben zur Vorlesung "Finanzmanagement"

B. Erke
FH Gelsenkirchen, Abteilung Bocholt

February 24, 2006

Aufgabenblatt: "Bewertung von Optionen"[1]

LÖSUNGSHINWEISE

1 European Put Option

Zeichnen Sie den Payoff einer europäischen Put Option mit dem Ausübungspreis E. Das Underlying hat den Preis S (Aktie).

1. Sie halten eine "long position" im Put

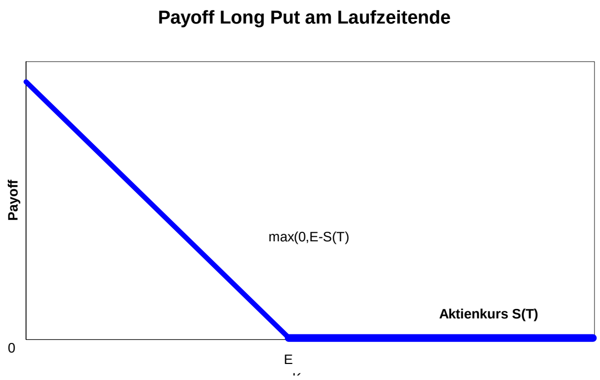


Figure 1:

[1] Quelle: Brealey/Myers (2000), Hull (2000), Bodie/Merton (1997)

2. Sie halten eine "short position" im Put

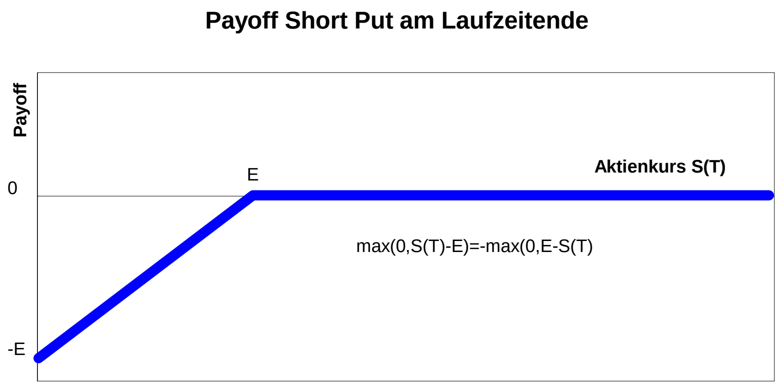


Figure 2:

2 Portfolio

Zeichnen Sie den Payoff eines Portfolios, bestehend aus einer europäischen Call Option und einer europäischen Put Option. Bei beiden Optionen ist der Verfallstermin identisch. Ausübungspreis ist jeweils E und die Optionen sind auf der Aktie mit dem Preis S geschrieben.

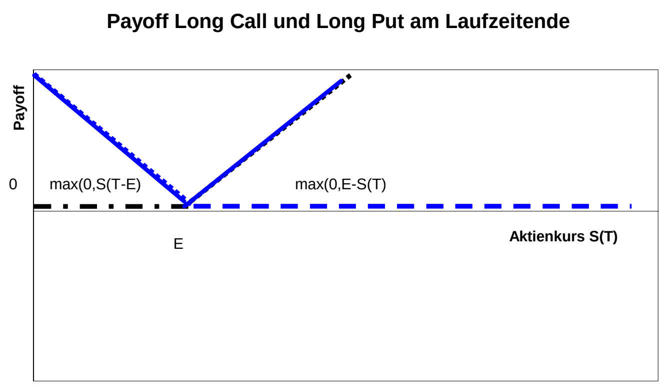


Figure 3:

3 Welche Aussage ist richtig?

1. Wert europäischer Put + Barwert des Basispreises = Wert europäischer Call +Aktienkurs

   Aussage: $p + e^{-r(T-t)}E = c + S\,(t)$

   Put/Call parity: $c - p = S(t) - e^{-r(T-t)}E \Leftrightarrow c - S(t) = p - e^{-r(T-t)}E$

   Also: Aussage falsch!!!!

2. Wert europäischer Put +Aktienkurs = Wert europäischer Call + Barwert des Basispreises

   Aussage: $p + S\,(t) = c + e^{-r(T-t)}E$

   Put/Call parity: $c - p = S(t) - e^{-r(T-t)}E \Leftrightarrow p + S(t) = c + e^{-r(T-t)}E$

   Also: Aussage wahr!!!

3. Wert europäischer Put-Aktienkurs = Barwert des Basispreises-Wert europäischer Call

   Aussage: $p - S\,(t) = e^{-r(T-t)}E - c$

   Put/Call parity: $c - p = S(t) - e^{-r(T-t)}E \Leftrightarrow p + S(t) = c + e^{-r(T-t)}E$

   Also: Aussage falsch!!!!

4. Wert europäischer Put+Wert europäischer Call=Aktienkurs-Barwert des Basispreises

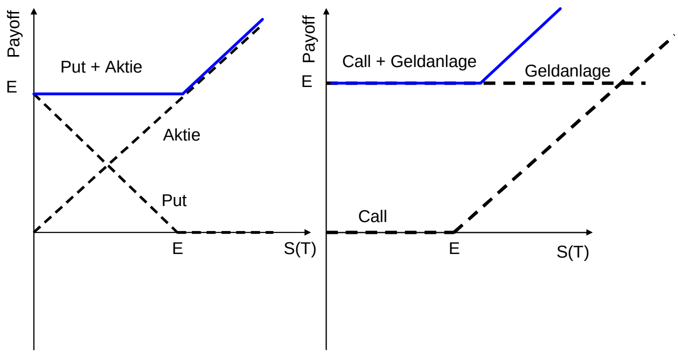
   Aussage: $p + c = S\,(t) - e^{-r(T-t)}E$

   Put/Call parity: $c - p = S(t) - e^{-r(T-t)}E$

   Also: Aussage falsch!!!!

5. Die richtige Aussage setzt den Wert zweier Anlagestrategien gleich. Zeichnen Sie den Payoff jeder Strategie als Funktion des Preises des Underlying. Zeigen Sie, dass beide Strategien identische Payoffs haben.

$$p+S(t)=c+e^{-r(T-t)}E$$



4 "Zeitung lesen"

Nehmen Sie den Kursteil einer brauchbaren Wirtschaftszeitung und suchen Sie die Optionspreise. Überprüfen Sie, ob einige Aussagen über Optionen wirklich stimmen:

1. Was passiert, wenn sich Optionen dem Verfallstermin annähern? Was würden Sie bezüglich des Optionspreises erwarten? Stimmt das?

2. Vergleichen Sie 2 Call Optionen, die auf dieselbe Aktie geschrieben sind. Die Calls sollten dieselbe Laufzeit haben aber sich hinsichtlich des Ausübungspreises unterscheiden.

3. Vergleichen Sie 2 Call Optionen, die auf dieselbe Aktie geschrieben sind. Die Calls sollten dieselben Ausübungspreise haben, sich hinsichtlich der Laufzeit haben aber unterscheiden.

5 Binominalbaumbewertung

Der Kurs einer Aktie ist aktuell 40. Es ist bekannt, dass der Kurs am Monatsende entweder 42 oder 38 betragen wird. Der risikofreie Zinssatz ist 8%. Berechnen Sie den Wert eines europäischen Calls (Laufzeit 1 Monat) mit dem Ausübungspreis 39.

Es wird ein Portfolio aus δ Aktien und einer Geldanlage in Höhe von B_0 in die risikofreie Anlage betrachtet zum Zeitpunt $t = 0$ betrachtet. Der Wert des Portfolios kann am Ende der Laufzeit zwei mögliche Werte annehmen:

Up: $\delta \cdot 42 + B_0 \cdot \left(1 + \frac{.08}{12}\right)$

Down: $\delta \cdot 38 + B_0 \cdot \left(1 + \frac{.08}{12}\right)$

Auch der Call hat am Laufzeitende zwei mögliche Werte.
Up: 3; Down: 0

Gesucht sind die Aktien (δ) und der Investitionsbetrag in risikofreie Anlagen heute (B_0), so dass das Portfolio den Wert des Calls dupliziert:

$\delta \cdot 42 + B_0 \cdot 1.006\,7 = 3$
$\delta \cdot 38 + B_0 \cdot 1.006\,7 = 0$

$$\begin{bmatrix} 42 & 1.006\,7 \\ 38 & 1.006\,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \textit{ Lösung ist: } \begin{bmatrix} 0.75 \\ -28.31 \end{bmatrix}$$

0,75 Aktien müssen gekauft werden und 28,31 müssen geliehen werden.
Wert des Call:

$c = .75 \cdot 40 + (-28.31) = 1.69$

6 Einige Grundlagen

1. Erklären Sie, wie ein europäischer Call mit Hilfe der Arbitragefreiheit und mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsmethode bewertet werden kann.
2. Was ist das Delta einer Option?

7 Binominalbaum und risikoneutrale Bewertung

Eine Aktie kostet aktuell 50. Es ist bekannt, dass der Kurs in 6 Monaten entweder 60 oder 42 betragen wird. Der risikofreie Zinssatz ist 12% p.a..

1. Berechnen Sie den Wert eines europäischen Calls (Laufzeit 6 Monate) mit dem Ausübungspreis 48 mit Hilfe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten.

   $$prob = \frac{\left(1 + \frac{.12}{12}\right)^6 - \frac{42}{50}}{\frac{60}{50} - \frac{42}{50}} = 0.615\,33$$

   $$c = \frac{0.615\,33 \cdot 12 + (1 - 0.615\,33) \cdot 0}{\left(1 + \frac{.12}{12}\right)^6} = 6.956$$

2. Zeigen Sie, dass das Argument der Arbitragefreiheit zum selben Ergebnis kommt wie die risikoneutrale Bewertung.

   Es wird ein Portfolio aus δ Aktien und einer Geldanlage in Höhe von B_0 in die risikofreie Anlage betrachtet zum Zeitpunt $t = 0$ betrachtet. Der Wert des Portfolios kann am Ende der Laufzeit zwei mögliche Werte annehmen:

Up: $\delta \cdot 60 + B_0 \cdot \left(1 + \frac{.12}{12}\right)^6$

Down: $\delta \cdot 42 + B_0 \cdot \left(1 + \frac{.12}{12}\right)^6$

Auch der Call hat am Laufzeitende zwei mögliche Werte.
Up: 12; Down: 0

Gesucht sind die Aktien (δ) und der Investitionsbetrag in risikofreie Anlagen heute (B_0), so dass das Portfolio den Wert des Calls dupliziert:

$$\left(1 + \frac{.12}{12}\right)^6 = 1.061\,5$$

$\delta \cdot 60 + B_0 \cdot 1.061\,5 = 12$
$\delta \cdot 42 + B_0 \cdot 1.061\,5 = 0$

$$\begin{bmatrix} 60 & 1.061\,5 \\ 42 & 1.061\,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{Lösung ist: } \begin{bmatrix} 0.666\,67 \\ -26.378 \end{bmatrix}$$

$\frac{2}{3}$ *Aktien müssen gekauft werden und* 26.378 *müssen geliehen werden.*
Wert des Call:

$$c = \frac{2}{3} \cdot 50 + (-26.378) = 6.955\,3$$

8 Black/Scholes-Formel

Der Kurs der Backwoods Chemical Company war am 20 Januar 80. Die Aktie zahlt keine Dividende. Drei Call Optionen auf diese Aktie werden gehandelt. Eine verfällt am 20. April, eine am 20 Juli und eine am 20. Oktober. Alle drei Optionen sind mit dem Ausübungspreis 100 ausgestattet. Die Standardabweichung der Backwoods Aktie ist 42% pro Jahr. Der risikofreie Zins ist 11% p.a. Berechnen Sie den Preis der drei Call Optionen.

$$c_0 = S_0 \cdot N(d_1) - e^{-r(T)} \cdot N(d_2)$$

oder

$$c_t = S_0 \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot E \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{(T-t)}$$

Einsetzen: April-Option

$$c_t = 80 \cdot N(d_1) - e^{-.11 \cdot \frac{3}{12}} \cdot 100 \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{80}{100}\right) + \left(.11 + \frac{(.42)^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{12}\right)}{.42 \cdot \sqrt{\frac{3}{12}}} = -0.826\,64$$

$\text{NormalDist}\left(-0.826\,64\right) = 0.204\,22$

$d_2 = -0.826\,64 - .42 \cdot \sqrt{\frac{3}{12}} = -1.036\,6$

$\text{NormalDist}\left(-1.036\,6\right) = 0.149\,96$

$c = 80 \cdot 0.204\,22 - \exp\left(-.11 \cdot \frac{3}{12}\right) \cdot 100 \cdot 0.149\,96 = 1.748\,4$

Einsetzen: Juli-Option

$c_t = 80 \cdot N\left(d_1\right) - e^{-.11 \cdot \frac{6}{12}} \cdot 100 \cdot N\left(d_2\right)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{80}{100}\right) + \left(.11 + \frac{(.42)^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{6}{12}\right)}{.42 \cdot \sqrt{\frac{6}{12}}} = -0.417\,68$$

$\text{NormalDist}\left(-0.417\,68\right) = 0.338\,09$

$d_2 = -0.417\,68 - .42 \cdot \sqrt{\frac{6}{12}} = -0.714\,66$

$\text{NormalDist}\left(-0.714\,66\right) = 0.237\,41$

$c = 80 \cdot 0.338\,09 - \exp\left(-.11 \cdot \frac{6}{12}\right) \cdot 100 \cdot 0.237\,41 = 4.5767$

Einsetzen: Oktober-Option

$c_t = 80 \cdot N\left(d_1\right) - e^{-.11 \cdot \frac{9}{12}} \cdot 100 \cdot N\left(d_2\right)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{80}{100}\right) + \left(.11 + \frac{(.42)^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{12}\right)}{.42 \cdot \sqrt{\frac{9}{12}}} = -0.204\,8$$

$\text{NormalDist}\left(-0.204\,8\right) = 0.418\,86$

$d_2 = -0.204\,8 - .42 \cdot \sqrt{\frac{9}{12}} = -0.568\,53$

$\text{NormalDist}\left(-0.568\,53\right) = 0.284\,84$

$c = 80 \cdot 0.418\,86 - \exp\left(-.11 \cdot \frac{9}{12}\right) \cdot 100 \cdot 0.284\,84 = 7.2804$

9 Contingent Claim

1. Contingo Corporation hat Assets im Marktwert von 100 Mio. Die Assets sind mit EK (1,5 Mio. Aktien) und FK (Zerokupon Anleihe mit Nominalwert 90Mio, 90.000 Anleihen) finanziert. Die Anleihen haben kein Bonitätsrisiko und sind in 1 Jahr fällig. Der risikofreie Zinssatz ist 4,5% p.a.. Berechnen Sie den Marktwert der Anleihen, des Eigenkapitals, den Aktienkurs!

   (a) Berechnen Sie den Marktwert des EK

   $110 - \frac{90}{1.045} = 23.876$

(b) Berechnen Sie den Marktwert des FK

$\frac{90}{1.045} = 86.124$

(c) Berechnen Sie den Aktienkurs

$$\frac{23876000}{1500000} = 15.917$$

2. Angenommen, die Contingo Corporation ist in einem Jahr entweder 90 Mio. oder 120 Mio. wert. Die Anleihe besitzt nach wie vor kein Bonitätsrisiko. Verwenden Sie die Contingent Claim Analyse zur Bestimmtung des Marktwertes des EK. Berechnen Sie den Anleihekurs.

   (a) Berechnen Sie den Marktwert des EK

   $u = \frac{120}{110} = 1.0909$

   $d = \frac{90}{110} = 0.818$

   $i = 0.045$

   $$prob = \frac{0.045 - (0.818 - 1)}{0.0909 - (0.818 - 1)} = 0.83181$$

   $$\frac{0.83181 \cdot 30 + (1 - 0.83181) \cdot 0}{1.045} = 23.880$$

   (b) Berechnen Sie den Marktwert des FK
   $110 - 23.880 = 86.12$

3. Angenommen, die Contingo Corporation ist in einem Jahr entweder 70 Mio. oder 160 Mio. wert. Der Marktwert aller Assets ist aktuell 110Mio. Der Nennwert der ausstehenden Anleihen ist 90 Mio. Die Anleihe besitzt nun ein Bonitätsrisiko.

   (a) Zeichnen Sie den Wert des EK und der Anleihen in Abhängigkeit vom Unternehmenswert in ein Diagramm.

   (b) Intuitiv: Sollten die Anleihen mit Bonitätsrisiko mehr oder weniger wert sein als die ohne Bonitätsrisiko?

   (c) Berechnen Sie den Marktwert des EK!

   $u = \frac{160}{110} = 1.4545$

   $d = \frac{70}{110} = 0.63636$

   $i = 0.045$

   $$prob = \frac{0.045 - (0.63636 - 1)}{0.4545 - (0.63636 - 1)} = 0.49947$$

   $$EK = Call = \frac{0.49947 \cdot 70 + (1 - 0.49947) \cdot 0}{1.045} = 33.457$$

(d) Berechnen Sie den Marktwert des FK!

Möglichkeit a): Residual

$$FK = 110 - 33.457 = 76.543$$

Möglichkeit b): Marktwert FK = Wert sicher Anleihe - Wert Put Option

Wert der Put-Option, die die FK-Geber verkauft haben:

$$Put = \frac{0.499\,47 \cdot 0 + (1 - 0.499\,47) \cdot 20}{1.045} = 9.579\,5$$

$$FK = \frac{90}{1.045} - 9.579\,5 = 76.545$$